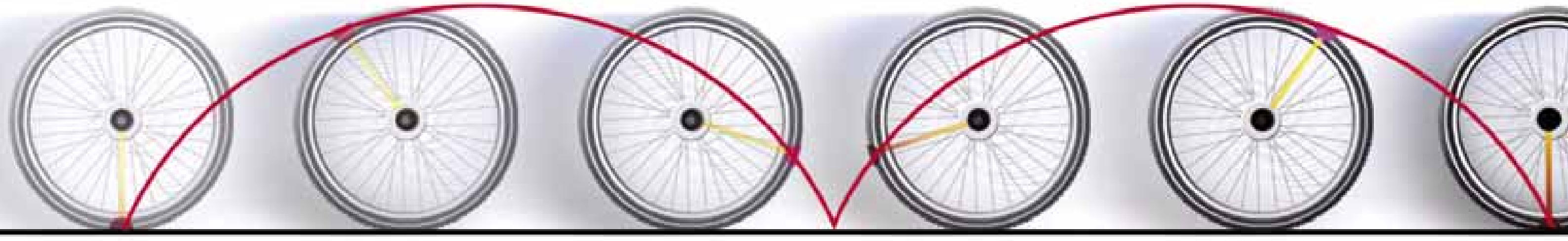
Eksperymentuj!

Najszybsza zjeżdżalnia

Po jakim torze powinna toczyć się kulka, aby pokonać drogę między dwoma punktami w najkrótszym czasie? To pytanie postawione w 1696 roku miało być wyzwaniem dla najlepszych ówczesnych matematyków. Odpowiedź posłużyła budowniczym mostów, promów kosmicznych oraz przyczyniła się do stworzenia naszego eksponatu.

CENTRUM NAUKI
KOPERNIK



Cykloida jest krzywą, którą zakreśla punkt położony na kuli lub okręgu (lub tak jak na rysunku na oponie koła rowerowego) toczącym się bez poślizgu. Brachistochrona, zwana też krzywą najszybszego spadku, jest fragmentem cykloidy

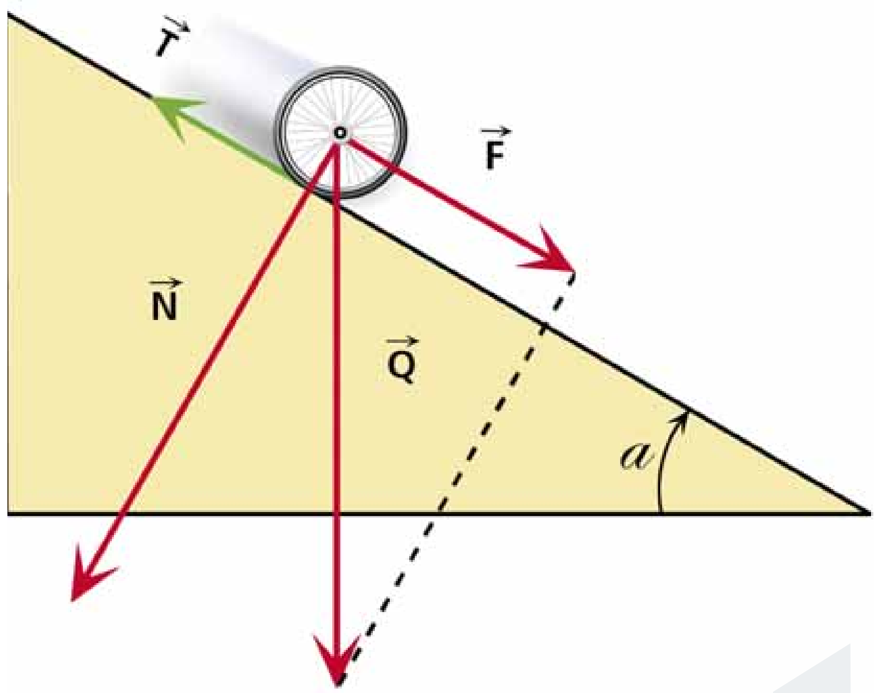
Trzy kulki toczą się w dół po torach o różnym kształcie. Paradoksalnie wyścig wygrywa zawsze kulka staczająca się po najdłuższym torze – cykloidzie. Doświadczenie pokazuje własności tajemniczej krzywej intrygującej matematyków żyjących w XVII wieku. Eksperyment, który można przeprowadzić na naszej wystawie, ilustruje następujące zagadnienie: jaki kształt powinien mieć tor, po którym stacza się punkt materialny pod wpływem siły grawitacji, aby pokonać odległość między dwoma punktami w najkrótszym czasie?

Naszym punktem materialnym jest stalowa kulka, a punkt początkowy i końcowy wędrówki wyznaczają końce równi pochyłej. Wynik doświadczenia przeczy naszej intuicji. Kulka przebywająca najdłuższą drogę przebywa ją w najkrótszym czasie. Tor, po którym się porusza, ma kształt cykloidy odwróconej do góry nogami.

Cykloida jest krzywą, którą zakreśla punkt na obwodzie koła toczącego się jednostajnie po linii prostej. Wyobraźmy sobie, że na oponie koła rowerowego malujemy farbą kropkę i śledzimy jej ruch podczas jazdy roweru po płaskiej ścieżce. Krzywa, którą zakreśla kropka, to właśnie cykloida (patrz: rysunek powyżej).

Spróbujmy przeanalizować ruch kulki na dwóch zjeżdżalniach – linii prostej (równi pochyłej) i cykloidzie. Obie zjeżdżalnie startują z tej samej wysokości, a więc umieszczając kulki na szczytach równi, nadajemy im takie same energie potencjalne. Podczas ruchu w dół energie potencjalne kulek maleją, a rosną ich energie kinetyczne, czyli te związane z prędkością. Dochodzi do zamiany energii potencjalnej w kinetyczną. Ponieważ podnóża obydwu równi znajdują się też na tych samych wysokościach, energie potencjalne obu kulek również muszą być tam równe. Zgodnie z zasadą zachowania energii energie kinetyczne kulek muszą być sobie równe na końcu drogi. Masy kulek są jednakowe, więc ich prędkości u podnóża równi są takie same. Kulka staczająca się po dłuższym torze uzyskuje jednak większą prędkość średnią i wygrywa wyścig. Zysk na prędkości z nadwyżką kompensuje wydłużenie drogi. W jaki sposób możemy wyjaśnić wynik doświadczenia?

Ruch kulek spowodowany jest składową siły ciężkości równoległą do toru. Na równi ma ona stałą wartość, a więc zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona kulka uzyskuje stałe przyspieszenie (patrz: rysunek poniżej) – jej prędkość jednostajnie wzrasta. Na cykloidzie napędzająca składowa siły ciężkości ze względu na kształt toru się zmienia. Kulka na początku ruchu bardzo szybko zwiększa prędkość, aby w następnej fazie – podczas jazdy „pod górkę" – stopniowo ją zmniejszać. Duży zysk prędkości, jaki kulka uzyskuje na początku toru, decyduje o tym, że wygrywa wyścig.



Siłą nadającą przyspieszenie kołu na równi pochyłej jest składowa ($\vec{F}$) siły ciężkości ($\vec{Q}$). Na równi wartość $\vec{F}$ jest stała i zależy tylko od pochyłości α. Na cykloidzie wartość siły spychającej $\vec{F}$ zależy od punktu, w którym znajduje się koło, wobec tego przyspieszenie koła nie jest stałe. $\vec{N}$ – to siła dociskająca koło do powierzchni równi, a $\vec{T}$ jest siłą tarcia o podłoże

Fot. Corbis, NASA; rys. Małgorzata Świentczak x2

O historii

Pytanie o tor, po którym powinna poruszać się kulka, aby jak najszybciej połączyć dwa punkty w przestrzeni, postawił szwajcarski matematyk Johann Bernoulli. W 1696 roku rozesłał on prośbę o rozwiązanie tej zagadki do „najwybitniejszych matematyków na świecie", jednocześnie ustalił termin – sześć miesięcy – na nadesłanie rozwiązania.

Na pytanie postawione przez Bernoulliego odpowiedzi nadesłało czterech matematyków. Byli to Izaac Newton, Gottfried Leibniz, Guillaume de L'Hôpital oraz Jakob Bernoulli – brat autora zagadki. Byli to najwybitniejsi ówcześni uczeni.

Rozwiązaniem okazała się krzywa zwana cykloidą. Krzywa ta od dawna intrygowała matematyków ze względu na wiele ciekawych własności matematycznych. Ma ona wiele przydatnych zastosowań praktycznych, np. w technice budowy mostów. Już Galileusz, od którego pochodzi jej nazwa, wskazywał, że cykloida jest łukiem najbardziej wytrzymałym na obciążenia. Dlatego też wiele mostów ma cykloidalne arkady.

Zagadnienie brachistochrony, czyli krzywej najkrótszego czasu spadku, zapoczątkowało rozwój obszernej dziedziny matematyki zwanej rachunkiem wariacyjnym. Metody wariacyjne są z powodzeniem wykorzystywane w wielu dziedzinach fizyki, od zagadnień związanych z ruchem satelitów aż po znajdywanie funkcji falowych, które opisują rozkład chmury elektronowej w cząsteczce.

Cykloida to krzywa, która ma wiele praktycznych zastosowań. Jedno z nich już dawno temu zauważyli budowniczowie mostów. Konstrukcja mostów, których arkady mają cykloidalny kształt, jest bardziej wytrzymała na obciążenia

Współczesne zastosowania

Krzywa najszybszego spadku to właściwie fragment cykloidy do góry nogami. Matematycy nazywają ją często brachistochroną. Nazwa, którą zaproponował Jakob Bernoulli pochodzi od greckich słów: *brachistos* – najkrótszy, *chronos* – czas. Właściwości brachistochrony często są wykorzystywane w praktyce: na przykład do planowania toru lotu promów kosmicznych, aby osiągnęły wymaganą wysokość w najkrótszym czasie, zużywając przy tym jak najmniejszą ilość paliwa. Także piloci samolotów ponaddźwiękowych posiłkują się tą krzywą w nawigacji.

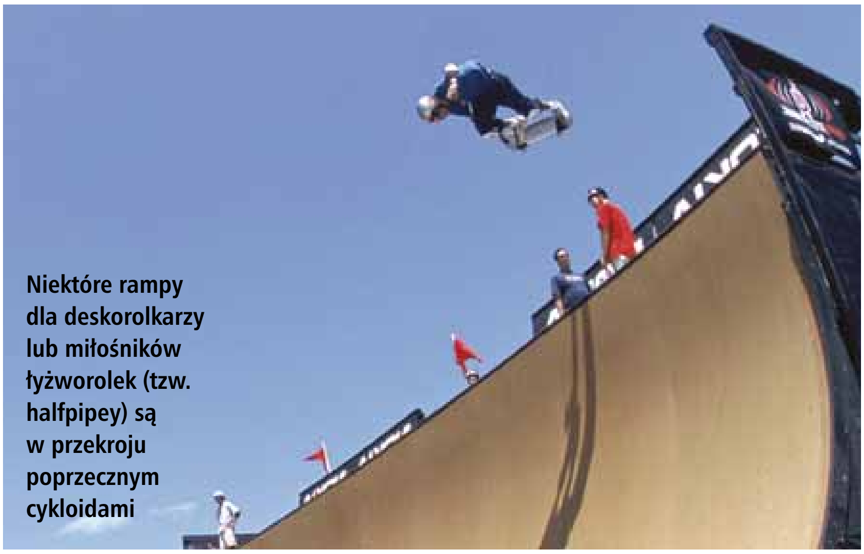
W mechanice precyzyjnej w celu zminimalizowania poślizgu brachistochrona wykorzystywana jest w konstrukcji kół zębatych w przekładniach mechanicznych.

Brachistochronę – krzywą najszybszego spadku – wykorzystuje się do planowania toru lotu promów kosmicznych. Na zdjęciu: start promu kosmicznego Atlantis z 12 czerwca 2001 roku

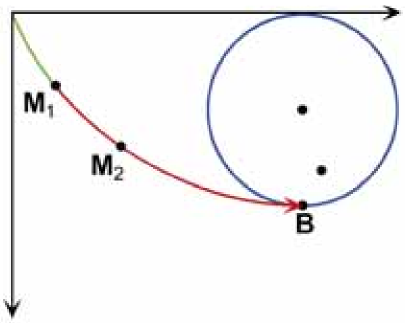
A to ciekawe

Zagadnienie krzywej najkrótszego czasu spadku jest w matematyce nazywane zagadnieniem brachistochrony. Brachistochronę determinują następujące czynniki: punkt początkowy, końcowy, pole sił, w którym porusza się ciało (np. siła grawitacji, siły lepkości, tarcia itd.), oraz tzw. warunki początkowe (czyli np. czy poruszające się ciało ma prędkość początkową). Cykloida jest jedną z brachistochron, dla której zakłada się brak tarcia i oporów ruchu, a jedynym polem sił jest jednorodne pole grawitacyjne.

Jeżeli nasz eksponat umieścilibyśmy w wodzie, w której są duże opory ruchu, cykloida nie byłaby już krzywą najkrótszego czasu spadku.



Niektóre rampy dla deskorolkarzy lub miłośników łyżworolek (tzw. halfpipey) są w przekroju poprzecznym cykloidami



Nieważne, z którego punktu cykloidy rozpoczniemy wędrówkę. Zawsze dotrzemy do punktu B w tym samym czasie. Drogi M_1B i M_2B, mimo że różnej długości, pokonamy w tym samym czasie

Cykloida ma też interesującą właściwość fizyczną. Okazuje się, że czas potrzebny poruszającemu się po niej ciału na osiągnięcie punktu końcowego nie zależy od wybranego położenia początkowego. Drogi M_1B i M_2B pokonane zostaną w jednakowym czasie (patrz: rysunek). Z powodu tej ciekawej właściwości cykloida nazywana jest także izochroną lub tautochroną.

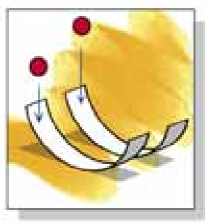
Ta cecha cykloidy oznacza, że gdybyśmy stworzyli wahadło, którego ramię zakreślałoby cykloidę, to otrzymalibyśmy urządzenie, dla którego czas pełnego wahnięcia nie zależy od wielkości wychylenia. Tę niezwykłą właściwość zauważył już w 1659 roku holenderski matematyk, fizyk i astronom Christiaan Huygens i wkrótce została ona wykorzystana na statkach, na których ze względu na przechyły wahadła zegarów odchylały się raz mocniej, raz słabiej. Standardowe zegary wahadłowe w tych warunkach były bezużyteczne, ale te oparte na ruchu cykloidalnym tykały miarowo.

Eksperymentuj!

Więcej doświadczeń

Narysowanie cykloidy nie jest proste. Można jednak posłużyć się arkuszem kalkulacyjnym. Tworzymy cztery kolumny: alfa, alfa_rad, X i Y. Kolumnę alfa wypełniamy liczbami od 0 do 360 ze skokiem co 5. Liczby te określają kąt pełnego obrotu toczącego się koła. Ponieważ funkcje trygonometryczne *sin* oraz *cos* są liczone dla kątów w radianach, przeliczamy więc kąt podany w kolumnie alfa na radiany:
alfa_rad=alfa×0,01745

Trzecia i czwarta kolumna to liczby określające współrzędną X i Y punktu należącą do cykloidy i aby je wyliczyć, korzystamy ze wzorów:
X=R(alfa–*sin*alfa) i Y=R(1–*cos*alfa), gdzie R to promień koła zakreślającego cykloidę, a alfa to kąt, jaki zatoczyło koło w radianach. Dla uproszczenia przyjmijmy, że R=1. Po wypełnieniu wszystkich komórek robimy wykres Y(X), czyli na osi x odkładamy liczby z kolumny X, a na osi y liczby z kolumny Y. Powstała krzywa to właśnie cykloida. Przygotowany wykres możemy wykorzystać do ukształtowania zjeżdżalni. Przygotuj dwa tory w kształcie cykloidy i sprawdź, czy puszczone z różnych wysokości kulki spadną w jednakowym czasie.



Z internetu

Co to jest brachistochrona
http://pl.wikipedia.org/wiki

Brachistochrona i matematyka
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Brachistochrone.html

Jak powstaje cykloida
http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html

Cykloida i inne krzywe
www.mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta0206/zegarmistrz.pdf

Fot. Centrum Nauki Kopernik, Corbis; rys. Małgorzata Świentczak 2x